

CONCOURS 2025

PARCOURS CONCEPTION SON

Admissibilité 2 : Epreuve écrite de physique

Durée : 2h00 – coefficient 1

23 avril 2025 – 14h00 à 16h00

Sujet :

Le présent sujet comporte 6 pages. Assurez-vous que cet exemplaire soit complet. S'il est incomplet, demandez un nouvel exemplaire au surveillant de salle.

Notation :

La note de la copie sera donnée sur 20.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Le sujet est composé de trois exercices indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Consignes :

- Aucun document, à part le sujet lui-même, n'est autorisé.
- Aucun appareil électronique est permis, **à part une calculatrice en mode examen.**
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1 : Vibrations des cordes de guitare (9 pts)

Notations et rappels

Introduisons quelques notations mathématiques. Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de deux variables réelles notées x et t . Alors, on définit ses dérivées par rapport à x et t , notées par les formules suivantes :

$$\forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0) = \frac{df_{t=t_0}}{dx}(x_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial t}(x_0, t_0) = \frac{df_{x=x_0}}{dt}(t_0)$$

où on a noté $f_{t=t_0} : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, t_0)$ et $f_{x=x_0} : t \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0, t)$ pour tout $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors, si elles existent, on définit les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

On rappelle que toute fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est τ -périodique (et vérifie quelques conditions de régularité) peut se décomposer sous forme de série de Fourier, i.e. il existe des suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\psi(u) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{\tau} u + \phi_n\right)$$

Enfin, on rappelle la formule trigonométrique, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

Outre les notions mathématiques, rappelons le concept physique de masse linéique. Considérons un fil unidimensionnel Γ de longueur L , et dont on repère chaque point M par la longueur ℓ_M du fil entre une extrémité du fil O (dont le choix n'importe pas) et M . Alors, sa masse linéique μ est définie par, en tout point M du fil Γ :

$$\mu(M) = \frac{dm}{d\ell}(\ell_M)$$

où $m : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction qui à un réel $\ell \in [0, L]$ associe la masse de la section du fil entre O et du point que ℓ repère. Ces rappels faits, nous pouvons désormais aborder le sujet.

Ce sujet s'intéresse aux aspects physiques et acoustiques des guitare. Le problème ci-dessous démontre dans sa première partie, l'équation d'Alembert pour la propagation des ondes sur les cordes de guitare, puis dans sa seconde partie, la décomposition en modes propres de ces vibrations.



Figure 1 – Image de guitare acoustique.

Problème : Vibrations des cordes de guitare

Une démonstration de l'équation de d'Alembert

On considère une corde unidimensionnelle, d'extrémités fixes séparées d'une distance L , de masse linéique constante égale à μ , et qui évolue dans un plan $\mathcal{P}$. Afin de simplifier le problème, on négligera les éventuels frottements des cordes avec l'air, et leur poids. On munit $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé Oxy tel que O soit une de ses extrémités, et que l'autre soit également sur l'axe Ox (voir la figure 2). On modélise cette corde par une fonction $y : [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont les variables sont notées x et t , et qui associe à un réel $x \in [0, L]$ et un instant $t \in \mathbb{R}$ l'ordonnée du point de la corde d'abscisse x à l'instant t (supposé unique).

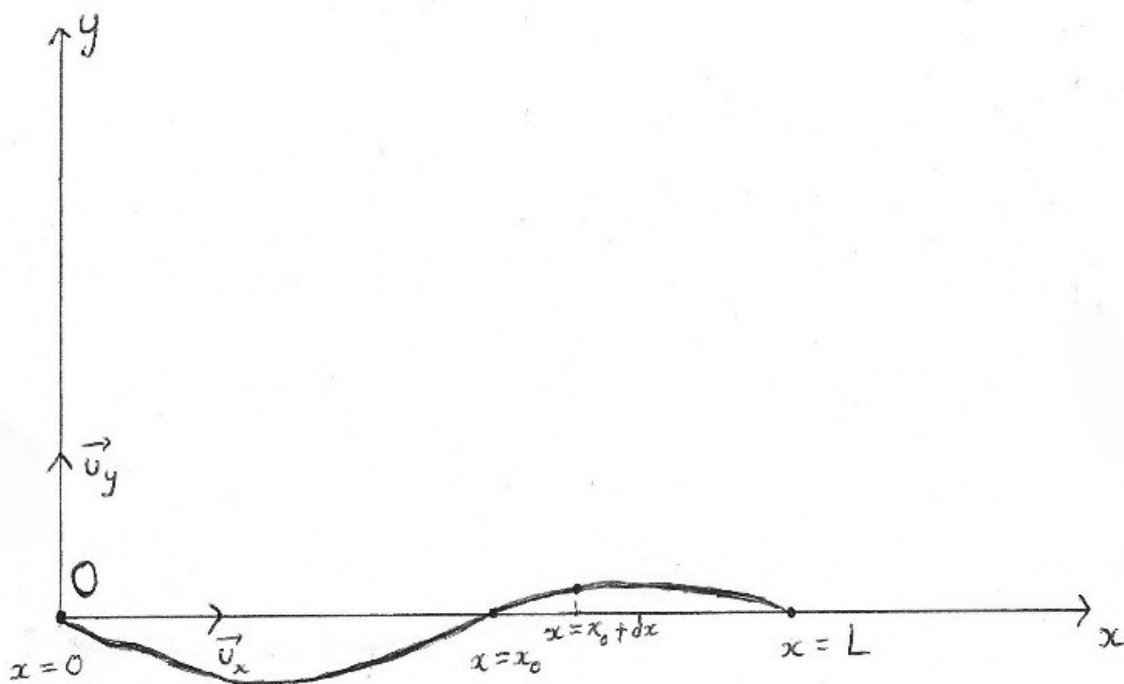


Figure 2 – Schéma du système étudié.

Enfin, pour tout instant t et pour tout abscisse x , on note $\theta_x(t)$ la mesure dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ de l'angle orienté entre l'axe Ox et la tangente à la corde au point $(x, y(x, t))$. Intéressons-nous désormais au tronçon infinitésimal de corde entre les abscisses x_0 et $x_0 + dx$ pour un certain x_0 de $]0, L[$. Ce tronçon est soumis à deux forces de tension T_1 et T_2 qui s'appliquent respectivement en ses extrémités gauche et droite, de normes respectivement égales à T_1 et T_2 et dirigées suivant la corde.

Q1. Exprimez $\frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$ en fonction de $\theta_x(t)$ pour tout $(x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}$.

Q2. Exprimez $\vec{T}_1(t)$ et $\vec{T}_2(t)$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ respectivement en fonction de $\theta_{x_0}(t)$, T_1 , et $\theta_{x_0+dx}(t)$, T_2 (il est vivement recommandé de faire un schéma), puis utiliser la question précédente pour faire apparaître $\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t)$ et $\frac{\partial y}{\partial x}(x_0 + dx, t)$.

Q3. Donnez l'expression du vecteur accélération du tronçon de corde entre x_0 et $x_0 + dx$. De plus, montrez que la masse élémentaire dm du tronçon est donnée par :

$$dm = \mu \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t)\right)^2} dx$$

On suppose que $\frac{\partial y}{\partial x}$ est très petit devant 1, de telle sorte qu'on retient que : $dm = \mu dx$.

Q4. On fait l'approximation des petits angles. En particulier, on a, à tout instant t et à toute abscisse x , $\cos(\theta_x(t)) \approx 1$. Montrez que la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le tronçon est donnée par :

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ext},i} = (T_2 - T_1)\vec{u}_x + \left(T_2 \frac{\partial y}{\partial x}(x_0 + dx, t) - T_1 \frac{\partial y}{\partial x}(x_0, t)\right)\vec{u}_y$$

Q5. Appliquez la seconde loi de Newton au tronçon dans le référentiel d'étude supposé galiléen. En projetant sur Ox , montrez que $T_1 = T_2 = T$ pour une certaine force T .

Q6. Montrez que l'équation différentielle à laquelle y obéit peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

Donnez alors l'expression de v , son unité SI et proposez une interprétation physique.

Cette équation différentielle s'appelle équation de d'Alembert, et admet une solution générale donnée par, à toute abscisse x et instant t :

$$\boxed{y(x, t) = F(vt - x) + G(vt + x)}$$

où F et G sont deux fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables deux fois.

Q7. Montrez que l'expression précédente est en effet solution de l'équation de d'Alembert.

Q8. Traduisez en contraintes sur y les conditions de bord aux extrémités de la corde.

Q9. Déduisez de ces contraintes sur y des contraintes sur F et G . En déduire l'expression générale d'une solution de l'équation de d'Alembert qui vérifie les conditions de bord en fonction d'une unique fonction à variable réelle.

Exercice 2 : Force de Laplace (7 pts)

Deux rails conducteurs rectilignes sont disposés horizontalement, parallèles entre eux et sont distants d'une longueur $L = 10\text{cm}$.

Une tige de cuivre cylindrique de masse $m = 30\text{g}$ est libre de rouler sur ces deux rails et assure entre eux un contact électrique.

La résistance électrique du circuit ainsi formé est négligeable.

Cette tige est placée dans l'entrefer de l'aimant en U qui crée un champ magnétique uniforme et vertical autour de la tige. Sa valeur est $B = 100\text{mT}$. Les deux rails sont reliés aux bornes d'un générateur continu de force électromotrice $E = 12\text{V}$ et de résistance interne $r = 1\text{ ohm}$.

Q1. Faire le schéma du dispositif en indiquant le sens du courant, du champ magnétique, de la force de Laplace.

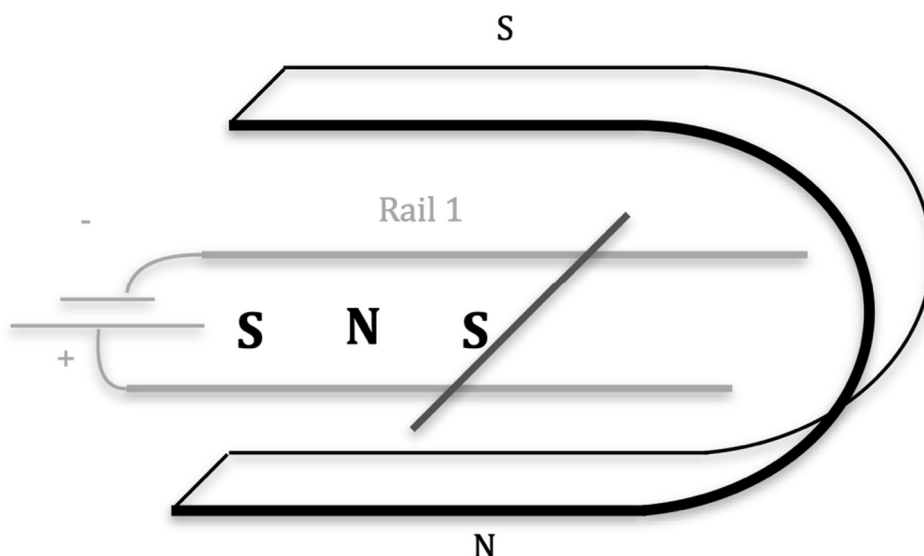
Q2. Quelle est la valeur de la tension électrique aux bornes du générateur ? Calculer la valeur de l'intensité I du courant dans la tige.

Q3. Calculer la valeur de la force de Laplace qui s'exerce sur la tige.

Les rails sont à présent inclinés d'un angle de 10° par rapport à l'horizontale. L'intensité I' du courant dans la tige est suffisante pour qu'elle reste immobile sur les rails.

Q4. Écrire la relation entre les forces agissant sur la tige

Q5. Calculer la valeur de l'intensité I' . En déduire la valeur de la résistance R du rhéostat qu'il faut placer en série avec les rails pour obtenir cette intensité avec le générateur utilisé.



Exercice 3 : Exercices numériques (4 pts)

Q1. A un instant t , un signal numérique codé sur 12 bits a une valeur S égale à :

$$S = 0011\ 1111\ 1111_2$$

- Exprimer la valeur de S en dBFS (dB Full Scale). Justifiez votre réponse.

Q2. Les valeurs suivantes sont exprimées en base 7.

$$A = 13_7, B = 22_7, C = 301_7$$

a) Calculer la valeur de Y , tel que :

$$Y = C - (A + B)$$

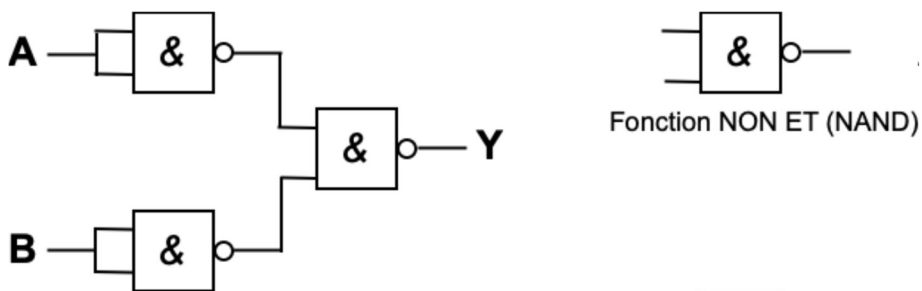
b) Exprimer la valeur de Y en base 7, en décimal et en hexadécimal.

Q3. Un convertisseur numérique analogique 12 bits a une résolution de $20\ \mu\text{V}$. Il convertit des tensions continues. La tension minimale de sortie est égale à $0\ \text{V}$.

- Pour un niveau de $-12,04\ \text{dBFS}$, quelle est la valeur de la tension de sortie de ce convertisseur ?

Justifiez votre réponse.

Q4. Soit le schéma logique suivant :



- Si $A = 0$, que vaut Y
- Si $A = 1$, que vaut Y
- Comment appelle-t-on la fonction logique Y ?